

Precessão de Thomas

PEDRO DINIZ

Universidade de São Paulo

pedro.diniz@usp.br

Resumo

Analisaremos o fenômeno relativístico da precessão de Thomas sob um ponto de vista geométrico. Para tal, construiremos um espaço de velocidades relativístico denominado disco de Poincaré e mostraremos que a precessão de Thomas decorre naturalmente como consequência da geometria deste espaço. Como uma aplicação, mostraremos que a descrição correta das linhas espectrais provenientes da estrutura fina depende fundamentalmente deste fenômeno.

1. INTRODUÇÃO

Sabe-se atualmente que a composição de transformações de Lorentz que preservam a orientação dos eixos espaciais, informalmente chamados de boosts, é equivalente à composição de um boost com uma rotação espacial pura, conhecida como rotação de Wigner-Thomas, e não a um boost puro como poderíamos ingenuamente supor. A relevância desse fenômeno foi apontada pela primeira vez por Thomas em 1926[6], motivado pelo fracasso do modelo atômico contemporâneo em descrever as linhas espectrais obtidas experimentalmente, que diferiam por um fator de 2 em relação a este, embora descrevessem corretamente o efeito Zeeman. O que Thomas mostrou foi que a origem dessa discrepância é um efeito relativístico, que ficou conhecido como *precessão de Thomas*, no qual o sistema de eixos coordenados de um referencial acelerado giram com uma dada frequência angular. A precessão de Thomas é uma consequência direta da rotação de Wigner-Thomas, portanto para compreendermos essa precessão devemos primeiramente entender o efeito de rotação devido à aplicação de boosts não colineares. A maioria dos textos tratam esse problema algebricamente, representando os boosts como matrizes, multiplicando-as, e reexpressando-as de maneira conveniente. Apesar deste ser um método relativamente simples por ser direto, os cálculos envolvidos são consideravelmente trabalhosos. Ao invés da abordagem matricial conduziremos um procedimento mais rico conceitualmente e que julgamos mais agradável ao leitor.

É sabido que muitos fenômenos relativísticos são mais facilmente derivados e entendidos quando tratados do ponto de vista geométrico e o mesmo ocorre com a precessão de Thomas. No decorrer do texto, construiremos um espaço de velocidades, denominado disco de Poincaré, no qual velocidades são representadas por pontos e, notavelmente, boosts são representados por geodésicas. Veremos que, pelo viés geométrico, a precessão de Thomas surge naturalmente como uma consequência da curvatura de certas geodésicas no disco de Poincaré. Obteremos a expressão para a frequência angular de Thomas com a qual referenciais acelerados rotacionam e, logo após, exibiremos as consequências que esse efeito de rotação acarreta na energia do átomo de hidrogênio.

2. ESPAÇO RELATIVÍSTICO DE VELOCIDADES

Suponha que estamos em um referencial inercial S e consideramos outro referencial inercial S' se movendo com velocidade constante em relação a S e cuja origem coincide com a origem de S para $t = t' = 0$. Sabemos que segundo um observador em S , a trajetória da origem de S' é descrita por uma reta no espaço-tempo de Minkowski que se encontra "dentro" do cone de luz e que intercepta a origem. Tendo isso em mente, note que qualquer reta que intercepta a origem e se encontra dentro do cone de luz representa a trajetória da origem de algum referencial se movendo com velocidade constante em relação a S . Como cada uma dessas retas se relaciona a uma e somente uma velocidade, podemos construir um espaço de velocidades simplesmente escolhendo um ponto de cada uma dessas retas. Temos certa liberdade no critério de escolha para esses pontos. Assim sendo, posto que almejamos analisar fenômenos que envolvem rotações, a melhor opção é trabalharmos em um espaço *conforme*, isto é, um espaço no qual ângulos se comportam de maneira Euclidiana. Ademais, gostaríamos que a métrica desse espaço de velocidades fosse invariante perante transformações de Lorentz, tal qual o espaço-tempo de Minkowski. É possível mostrar[4] que uma superfície no espaço-tempo que satisfaz as premissas acima é o parabolóide de revolução descrito por $ct = \frac{1+x^2+y^2}{2}$ cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^2(dx^2 + dy^2) = \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^2(dr^2 + r^2d\theta^2) \quad (1)$$

onde $r := \sqrt{x^2 + y^2}$. É fácil notar que esse parabolóide tangencia o cone de luz quando $r = 1$ e que retas que interceptam a origem cruzam o parabolóide a uma altura $ct < 1$ e o cruzam novamente em outro ponto com $ct > 1$. Em virtude de desejarmos cada reta correspondendo a somente um ponto no espaço de velocidades, elegeremos apenas a parcela $ct < 1$ do parabolóide como tal. Aliás, apesar de o parabolóide ser um espaço de velocidades conforme perfeitamente válido, será mais fácil trabalharmos com a projeção desse espaço no plano $(x - y)$ uma vez que é muito mais natural visualisarmos ângulos em duas dimensões. O resultado dessa projeção obviamente relaciona-se a um disco unitário, denominado *disco de Poincaré*, que herda a métrica

do parabolóide (Eq.1) e é um espaço conforme. Vide figura 1.

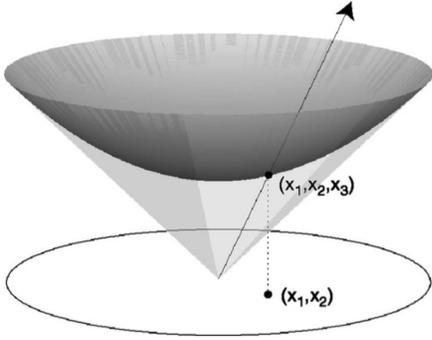


Figura 1: Projeção da parte $x_3 = ct < 1$ do parabolóide no plano [4]. Na figura, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = ct$.

A seguir, constataremos que a distância da origem $(0,0)$ até um ponto arbitrário (x_0, y_0) no disco de Poincaré representa uma grandeza denominada rapidez, definida a partir da velocidade de um referencial. Esta distância, que chamaremos de s , é obtida via integração do elemento de linha ds em coordenadas polares. Repare que, como desejamos integrar ao longo do raio, temos $d\theta = 0$. Em vista disso, segue de (Eq.1) que

$$s = \int_{(0,0)}^{(x_0, y_0)} ds = \int_0^R \left(\frac{2}{1-r^2} \right) dr = 2 \tanh^{-1} R \quad (2)$$

Com o propósito de obtermos a interpretação física de s será conveniente evocarmos o parabolóide. Note que um ponto no disco de Poincaré cuja componente radial é $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ corresponde ao ponto $(x_0, y_0, \frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2})$ do parabolóide. É simples perceber que este ponto está contido na reta cuja inclinação corresponde a

$$\frac{ct}{R} = \frac{1+R^2}{2R} \Rightarrow \frac{c}{v} = \frac{1+R^2}{2R} \Rightarrow \beta = \frac{2R}{1+R^2} \quad (3)$$

onde $\beta := v/c$. Escrevendo R em função de s obtemos facilmente que

$$\beta = \frac{2 \tanh \frac{s}{2}}{1 + \tanh^2 \frac{s}{2}} = \tanh s \quad (4)$$

Invertendo a equação acima vemos imediatamente que a distância s de um ponto em relação à origem do disco de Poincaré corresponde à quantidade $\tanh^{-1} \beta$ usualmente denominada *rapidez* e, por esse motivo, é mais adequado nos referirmos a esse espaço como *espaço de rapidez* ao invés de espaço de velocidades. Assim, fica evidente que a borda do disco representa velocidades iguais à velocidade da luz. Para esclarecer ainda mais o significado físico do espaço de rapidez relacionaremos as coordenadas (x, y) deste com as velocidades Euclidianas v_x e v_y . Primeiramente, note que como um ponto (x, y) do disco de Poincaré se relaciona com um ponto $(x, y, ct) = (x, y, (1+r^2)/2)$ do parabolóide segue que

$$\beta_x = \left(\frac{2}{1+r^2} \right) x, \quad \beta_y = \left(\frac{2}{1+r^2} \right) y, \quad \beta = \left(\frac{2}{1+r^2} \right) r \quad (5)$$

É simples notar que a terceira expressão de (Eq.5) é equivalente a uma equação de segundo grau pra r cuja solução é

$$r = \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \beta \quad (6)$$

onde $\gamma := (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Substituindo (Eq.6) nas duas primeiras expressões de (Eq.5) obtemos

$$x = \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \beta_x, \quad y = \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \beta_y \quad (7)$$

Ou seja, a coordenada x no disco de Poincaré é proporcional à componente v_x da velocidade e a coordenada y é proporcional à componente v_y . O fator de proporcionalidade em ambos os casos é de $\gamma/(\gamma+1)$. Note que no limite $v \rightarrow 0$ o elemento de linha ds dado por (Eq.1) se reduz a

$$ds^2 = (d\beta_x)^2 + (d\beta_y)^2 \quad (8)$$

que nada mais é que o elemento de linha do espaço Euclidiano não-relativístico de velocidades, de acordo com o esperado. Como uma última observação, repare que a grandeza $\arctan \frac{v_x}{v_y}$ corresponde ao ângulo formado pela velocidade v e o eixo horizontal do espaço real. Assim, utilizando as duas primeiras expressões de (Eq.5) vemos imediatamente que

$$\arctan \frac{v_x}{v_y} = \arctan \frac{x}{y} \quad (9)$$

de modo que o ângulo de v no espaço real é exatamente o mesmo ângulo no espaço de rapidez. Esta é uma consequência de que o espaço de rapidez é construído sob o requisito de que este seja um espaço conforme, e é esta propriedade que o faz tão útil na análise da precessão de Thomas.

Uma vez tendo estabelecido o espaço no qual trabalharemos e tendo explicitado sua interpretação física, precisamos de somente mais um elemento para entendermos a precessão de Thomas como um efeito geométrico. Exibiremos a seguir que boosts podem ser representados no disco de Poincaré como sendo suas *geodésicas*.

3. GEODÉSICAS NO DISCO DE POINCARÉ

Podemos pensar intuitivamente que ao aplicarmos um boost partindo um referencial inercial de velocidade v_1 para outro referencial de velocidade $v_2 > v_1$ passamos pelo número mínimo de velocidade que são maiores que v_1 e menores que v_2 . Sob essa heurística, inferimos que a trajetória correspondente a esse processo no espaço de velocidades é a de menor comprimento possível que, por definição, é uma geodésica. Existem dois tipos de geodésicas no disco de Poincaré. O primeiro tipo são retas que contém a origem do disco, ou seja, são os boosts que partem do repouso. A prova de que essas geodésicas são retas é muito simples: basta utilizarmos o princípio de mínima ação, assim como fazemos para demonstrar que a menor distância entre dois pontos no espaço Euclidiano é um segmento de reta[4].

Para identificarmos quais são as geodésicas que não contém a origem utilizamos um fato bem estabelecido em geometria diferencial[5] que é o de que transformações que

preservam a métrica de um espaço quando aplicadas em geodésicas, produzem geodésicas. Podemos, portanto, tomar vantagem do fato de que a métrica do disco de Poincaré é, por construção, invariante perante transformações de Lorentz e aplicarmos o mesmo boost a cada ponto de um segmento de reta que contém a origem esperando assim obter uma geodésica que certamente não conterá a origem. Todo esse procedimento é muito bonito[4] mas, infelizmente, não o incluirei nessa monografia. Ao invés disso, simplesmente direi quais são estas geodésicas: são *arcos de circunferência* cujos centros de curvatura se encontram fora do disco de Poincaré e que intersectam a borda do disco perpendicularmente. Uma maneira de assimilar a razão pela qual essas geodésicas não são retas é observando que a métrica do espaço de rapidez nos diz que segmentos próximos à borda do disco possuem comprimento muito maior do que aparentam e, conseqüentemente, a curva que minimiza a distância entre estes dois pontos deve se curvar em direção ao centro do disco. Veremos a seguir que essas geodésicas curvas são o elemento chave na interpretação geométrica da precessão de Thomas.

4. ROTAÇÃO DE THOMAS = DEFEITO ANGULAR

Vimos nas seções precedentes que podemos representar velocidades por pontos no disco de Poincaré e boosts entre duas velocidades pelas geodésicas que ligam esses pontos. Revelaremos em breve que ao transportarmos um sistema de coordenadas ao longo de um triângulo geodésico, ao final do circuito manifesta-se um ângulo de rotação entre o referencial transportado e um referencial que permaneceu em repouso, ou seja, na origem. Isso decorre do fato de que como boosts puros, por definição, não envolvem rotações espaciais, os eixos coordenados que representam esses boosts no disco de Poincaré devem manter sempre um ângulo fixo em relação às suas geodésicas. Com efeito, considere dois boosts que contém a origem do espaço de rapidez. Suas correspondentes curvas no disco de Poincaré, que representaremos por Φ_1 e Φ_3 , serão retas que interceptam a origem. Adicionalmente, considere um boost que não contém a origem e cuja correspondente geodésica, que denominaremos Φ_2 , intersecta as outras duas. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ os ângulos entre as geodésicas. Isso está ilustrado na figura 2.

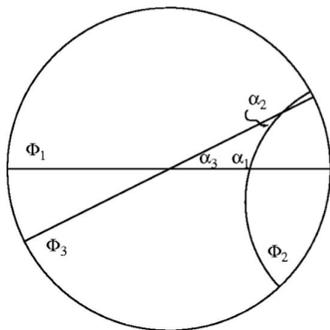


Figura 2: Triângulo formado pelas geodésicas Φ_1, Φ_2 e Φ_3 e seus correspondentes ângulos α_1, α_2 e α_3 .

Veja agora a figura 3 e note que ao transportarmos o sistema de coordenadas ao longo de Φ_1 partindo da origem até Φ_2 , não ocorre nenhuma variação no ângulo formado pelo eixo x do sistema de coordenadas e Φ_1 e, portanto, o ângulo formado por esse eixo e Φ_2 será $\pi - \alpha_1$.

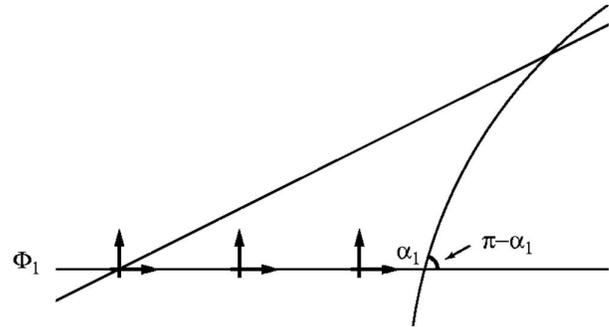


Figura 3: O primeiro boost ao longo de Φ_1 .

Como Φ_2 é uma geodésica, ao transportarmos o sistema de coordenadas do ponto de interseção de Φ_1 e Φ_2 até o ponto de interseção de Φ_2 e Φ_3 , como ilustrado na figura 4, o ângulo formado pelo eixo x do sistema de coordenadas e Φ_2 deve se manter constante de maneira que, no fim do processo, o eixo x formará um ângulo de $\pi - \alpha_1 - \alpha_2$ em relação à geodésica Φ_3 .

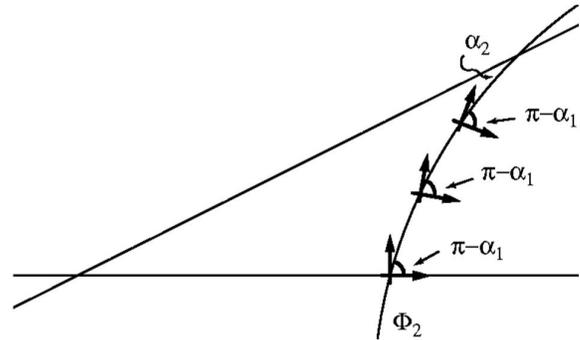


Figura 4: O segundo boost ao longo de Φ_2 .

Finalmente, vemos na figura 5 que ao transportando o sistema de coordenadas ao longo de Φ_3 de volta para a origem temos que o *ângulo de Thomas-Wigner* formado entre esse sistema de coordenadas e um sistema de coordenadas que permaneceu no repouso é de

$$TWR = -(\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)) \quad (10)$$

Perceba que se estivéssemos num espaço Euclidiano a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico seria igual a π , de modo que $\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ seria igual a zero. Em outras palavras, a quantidade $\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ é uma medida do quanto um triângulo geodésico não-Euclidiano difere de um triângulo Euclidiano. Por esse motivo os matemáticos nomearam essa grandeza de *defeito angular*. Assim, mostramos que a rotação que um referencial sofre após a aplicação de dois boosts não colineares é igual ao defeito

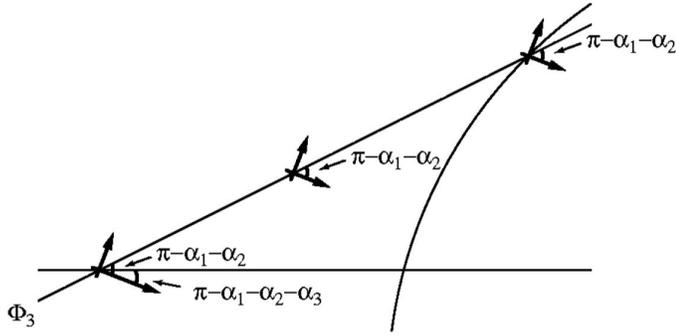


Figura 5: O terceiro boost ao longo de Φ_3 .

angular do correspondente triângulo geodésico no disco de Poincaré. Na próxima seção utilizaremos elegantemente esse resultado na obtenção da fórmula da precessão de Thomas via geometria.

5. A PRECESSÃO DE THOMAS

Suponha que um elétron descreva um movimento circular uniforme no espaço real. Sua trajetória no espaço de rapidez será dada por uma circunferência cujo raio corresponderá à velocidade do movimento. A abordagem que geralmente é utilizada no tratamento desse problema é a de considerar o referencial do elétron, que é não inercial, como uma sucessão de referenciais inerciais cujas velocidades coincidem com a velocidade do elétron pra cada instante de tempo de maneira que o movimento circular do elétron é interpretado como uma sequência de boosts não colineares entre esses referenciais, como ilustrado na figura 6. Veja que, nessa visão, temos que após cada um dos boosts o sistema de coordenadas sofrerá uma rotação. Por isto, é natural concluirmos que quanto melhor for a aproximação do círculo como uma composição de geodésicas temos que o referencial da partícula girará com uma certa velocidade angular. Esse efeito de rotação contínua é a precessão de Thomas. Para encon-

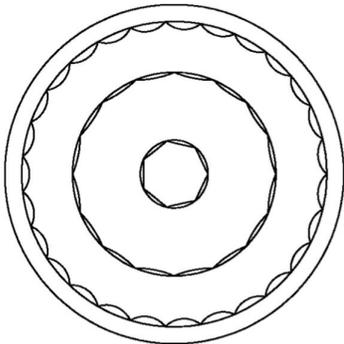


Figura 6: Aproximação de trajetórias curvas no espaço de rapidez por composição de segmentos de geodésicas.

trarmos o valor da precessão de Thomas empregaremos um método recorrente em geometria. Nos deslocaremos ao longo da trajetória fechada no espaço de velocidades formada por um triângulo geodésico e somaremos todos os deslocamentos angulares que ocorrem no caminho. Dizendo

melhor, desejamos relacionar a rotação de Thomas-Wigner a uma integral de contorno no disco de Poincaré. Para tal, mostraremos e utilizaremos o fato de que o defeito angular de um triângulo geodésico é numericamente igual à sua área interna. Ressalto que tratar do triângulo geodésico é suficiente posto que qualquer curva pode ser aproximada para uma composição de triângulos. Começemos o procedimento escrevendo o teorema de Green:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot ds = \int \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{n} d\sigma \quad (11)$$

onde escolhemos convenientemente o campo vetorial $\mathbf{F} := -y\hat{i} + x\hat{j}$. É possível mostrar que feita essa escolha de \mathbf{F} , temos $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{n} = 1$, de forma que o teorema de Green fica

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot ds = \int \int_{\Sigma} d\sigma = Area(\Sigma) \quad (12)$$

Por outro lado, segue da métrica do disco de Poincaré que $ds = (\frac{2}{1-r^2})(dx\hat{i} + dy\hat{j})$. Logo,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot ds = \oint_C (\frac{2}{1-r^2})(xdy - ydx) = Area(\Sigma) \quad (13)$$

Desejamos expressar a equação (Eq.13) em coordenadas polares. Usando as transformações $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ é trivial que

$$xdy - ydx = r^2 d\theta \quad (14)$$

Sendo assim, fica explícito que a única parte do triângulo geodésico C que contribuirá na integral é a geodésica Φ_2 em consequência de Φ_1 e Φ_3 serem retas e, por isto, $d\theta = 0$ ao longo das mesmas. Podemos escrever a forma desejada do teorema de Green

$$\int_{\Phi_2} (\frac{2r^2}{1-r^2}) d\theta = Area(\Sigma) \quad (15)$$

Com o intuito de calcularmos a integral acima trocaremos o sistema de coordenadas polares centrado na origem para um sistema de coordenadas polares centrado no ponto (a, b) que representa o centro da circunferência cujo arco corresponde à geodésica Φ_2 . Sendo $\sqrt{a^2 + b^2 - 1}$ o raio desse círculo e ω a correspondente coordenada angular, concluímos que a transformação desejada é

$$\begin{aligned} x &= a - \sqrt{a^2 + b^2 - 1} \cos \omega \\ y &= b - \sqrt{a^2 + b^2 - 1} \sin \omega \end{aligned} \quad (16)$$

Usando essas transformações de coordenadas é possível mostrar que

$$(\frac{2}{1-r^2})(xdy - ydx) = -d\omega \quad (17)$$

Agora, recorreremos a um argumento geométrico. Com o auxílio da figura 7, observe que os dois raios do círculo centrado em (a, b) juntamente com as geodésicas Φ_1 e Φ_3 formam um quadrilátero Euclidiano cuja soma de todos os ângulos internos deve ser igual a 2π , isto é

$$2\pi = \alpha_3 + (\alpha_1 + \frac{\pi}{2}) + \omega + (\alpha_2 + \frac{\pi}{2}) \quad (18)$$

ou, equivalentemente

$$\omega = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \quad (19)$$

Por fim, chegamos ao notável resultado de que a rotação de Thomas-Wigner corresponde à área interna do triângulo geodésico

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_{\Phi_2} d\omega = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -TWR \quad (20)$$

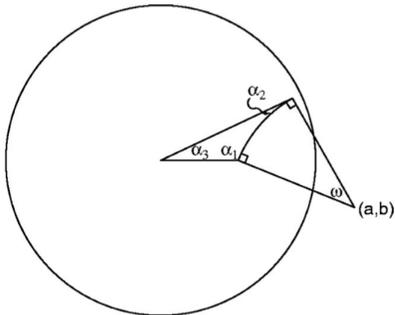


Figura 7: Quadrilátero Euclidiano no disco de Poincaré. A área (não-Euclidiana) do triângulo geodésico é igual ao seu defeito angular.

Agora que demonstramos que a integral (Eq.13) é igual ao negativo da rotação de Thomas-Wigner, e tendo em mente que qualquer curva pode ser composta por triângulos, podemos obter a expressão para a precessão de Thomas para uma curva arbitrária no disco de Poincaré. Para tal, basta exprimirmos o integrando da segunda expressão de (Eq.13) em termos da velocidade do elétron. Primeiramente, note que podemos escrever a expressão $x dy - y dx$ na forma de um produto vetorial

$$\left| \oint_C \left(\frac{2}{1-r^2} \right) (x dy - y dx) \right| = \oint_C \left(\frac{2}{1-r^2} \right) |(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{k}}| \quad (21)$$

Em seguida, multiplicando e dividindo o integrando por r^2 e fazendo uso de (Eq.6) é possível reescrever o mesmo da seguinte maneira:

$$\oint_C \left(\frac{2r^2}{1-r^2} \right) \left| \frac{(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{k}}}{r^2} \right| = \oint_C (\gamma - 1) \left| \frac{(\mathbf{v} \times d\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{k}}}{v^2} \right| \quad (22)$$

Expressando o integrando como uma diferencial exata $d\psi$ temos

$$d\psi = (\gamma - 1) \left| \frac{(\mathbf{v} \times d\mathbf{v})}{v^2} \right| = (\gamma - 1) \left| \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a})}{v^2} \right| dt \quad (23)$$

onde foi usado que $d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt$. Enfim, segue que a *velocidade angular de Thomas* com que o referencial do elétron gira em relação a um observador arbitrário é

$$\frac{d\psi}{dt} := \omega_{Thomas} = (\gamma - 1) \left| \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a})}{v^2} \right| \quad (24)$$

Note que no regime não relativístico, onde $v \ll c$, temos que a velocidade angular de Thomas é irrelevante corroborando o que geralmente esperamos de um efeito relativístico. Em contrapartida, quanto mais nos aproximamos da

velocidade da luz, maior é a frequência de Thomas. Uma propriedade física interessante que segue da equação acima é a de que a precessão de Thomas é um efeito puramente cinemático que dá-se sempre que a aceleração do referencial sendo analisado apresenta componente ortogonal à velocidade do mesmo. Equivalentemente, qualquer referencial que se mova ao longo de uma trajetória curvilínea rotacionará com uma velocidade angular dada por (Eq.24). Repare que a precessão de Thomas não é um fenômeno exótico. Muito pelo contrário: basta considerarmos trajetórias curvas que o fenômeno se manifestará. Dedicarei o restante dessa monografia à exposição do sistema físico que motivou Thomas a perceber a relevância do efeito que leva o seu nome.

6. APLICAÇÃO: MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA COM SPIN

Considere um sistema clássico composto por um elétron se movendo ao redor de um próton. Obviamente, a trajetória do elétron será curvilínea e, por conseguinte, o referencial de repouso do elétron apresentará precessão de Thomas quando observado pelo referencial do próton. A seguir obteremos a expressão para a energia de um elétron atômico exposto a um campo magnético externo levando em conta a precessão de Thomas. Assumiremos que o momento magnético μ do elétron é dado por

$$\mu = \frac{g e}{2mc} s \quad (25)$$

onde s representa seu spin e g é o fator de Landé do elétron. Segue dessa suposição que ao aplicarmos um campo magnético na região onde o elétron se encontra o mesmo sofrerá um torque dado por

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}' \quad (26)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ representa o torque e as linhas denotam que as grandezas $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{B} devem ser calculadas no referencial de repouso do elétron e expressas em função das coordenadas e dos campos medidos no referencial do laboratório. A expressão para \mathbf{B}' é trivialmente obtida via transformação de Lorentz [3].

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \quad (27)$$

Resta-nos obter a relação entre $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\tau}'$ levando em conta a precessão de Thomas. Goldstein[1] mostra que a taxa de variação do momento angular como vista por referenciais que apresentam um movimento relativo de rotação obedece a relação

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' + \omega_{Thomas} \times \mathbf{s} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}' + \omega_{Thomas} \times \mathbf{s} \quad (28)$$

onde foi usada a equação (Eq.26). Agora, serviremo-nos do fato de que uma equação da forma $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ é equivalente a uma expressão para a energia da forma $\mathcal{U} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. Essa correspondência pode ser verificada no exercício 6.22 do

Griffiths [2]. Dito isso, decorre da equação (Eq.28) que a energia do elétron é

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{sem\ precessao} + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\omega}_{Thomas} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\omega}_{Thomas} \quad (29)$$

Antes de substituirmos a expressão para \mathbf{B}' na equação (Eq.29) notemos que, como a velocidade de translação do elétron em torno do átomo é baixa quando comparada à velocidade da luz, é aceitável desprezarmos termos quadráticos de $\beta = v/c$. A transformação entre os campos, em primeira ordem, fica

$$\mathbf{B}' \approx \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c} \quad (30)$$

de modo que a expressão resultante para a energia do elétron considerando a precessão de Thomas é

$$\mathcal{U} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c} \right) + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\omega}_{Thomas} \quad (31)$$

Ficará clara agora a relevância desse termo de correção $\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\omega}_{Thomas}$. Para átomos que possuem somente um elétron podemos escrever a força elétrica $e\mathbf{E}$ como o negativo do gradiente de um potencial esfericamente simétrico $V(r)$

$$e\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV(r)}{dr} \quad (32)$$

Dessa forma, somos capazes de reescrever a parte não corrigida da energia assim:

$$\mathcal{U}_{sem\ precessao} = -\frac{ge}{2mc} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} + \frac{g}{2m^2c^2} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (33)$$

onde $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ é o momento angular orbital do elétron. Muito embora o primeiro termo da equação acima descreva corretamente o efeito Zeeman, foi observado experimentalmente que o segundo termo, decorrente da interação spin-órbita e responsável pela estrutura fina, está errado por um fator de 1/2. Mostraremos imediatamente que considerando a precessão de Thomas obtemos a fórmula correta para a energia. Mais uma vez considerando somente termos lineares em β e usando que a força que o elétron sofre é dada por (Eq. 32) temos que a frequência de Thomas, (Eq.23), se reduz a

$$\boldsymbol{\omega}_{Thomas} \approx \frac{1-\beta}{2c^2} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{m} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{-1}{2m^2c^2} \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (34)$$

Substituindo (Eq.34) e (Eq.33) em (Eq.29) obtemos

$$\mathcal{U} = -\frac{ge}{2mc} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} + \frac{(g-1)}{2m^2c^2} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (35)$$

Veja que se considerarmos o elétron como tendo um fator de Landé $g = 2$, a correção segundo a precessão de Thomas faz com que a energia de interação spin-órbita caia pela metade, de acordo com o desejado segundo os dados experimentais. Perceba que essa correção não afeta o efeito Zeeman, confirmando o fato de que a precessão do spin devido ao campo magnético e a precessão de Thomas são efeitos não relacionados e devem, portanto, ser considerados separadamente.

7. CONCLUSÃO

Foi apresentado um resumo de como podemos construir um espaço relativístico de velocidades denominado disco de Poincaré cujos pontos representam a rapidez associada a um referencial e suas geodésicas representam boosts. Por meio deste adquirimos o entendimento de que a rotação de Thomas-Wigner e a precessão de Thomas podem ser interpretados como um efeito geométrico e, além disso, fomos capazes de derivar a expressão para a frequência angular de Thomas com a qual um referencial se movendo ao longo de uma trajetória curva precessiona. Tendo esta expressão em mãos, mostramos que a precessão de Thomas é um efeito de crucial importância na análise da energia de um elétron atômico exposto a um campo magnético externo.

REFERÊNCIAS

- [1] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2002.
- [2] D. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [3] J. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 2012.
- [4] J. A. Rhodes and M. D. Semon. Relativistic velocity space, wigner rotation, and thomas precession. *American Journal of Physics*, 72(7):943–960, 2004.
- [5] K. Tapp. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2016.
- [6] L. H. Thomas. The motion of the spinning electron. *Nature*, 117(2945):514–514, 1926.